MATHE TUTOR

Thomas Benes
Bojan Radenković

Matura AHS

Grundkompetenztraining mit System

→ Technologieeinsatz berücksichtigt
→ Inklusive Typ-2-Aufgaben mit reduziertem Kontext

Digitales Zusatzangebot:
Kommentierte Lösungen

HELBLING

Digitales Zusatzangebot

Die Lösungen und weitere digitale Zusatzangebote kannst du online über die Helbling-Website abrufen. Ruf dazu www.helbling.com/code auf und gib den Access Code ein (mit einer Münze oder dem Fingernagel freirubbeln).

Bildnachweis
Umschlag wavebreakmedia – Shutterstock / 7 Robert Blaudziunas – Shutterstock / 11 SasaStock – Shutterstock / 15 Korionov – Shutterstock / 21 Vadim.Petrov – Shutterstock / 27 maziarz – Shutterstock / 33 Jaromir Chalabala – Shutterstock / 39 Withan Tor – Shutterstock / 45 B Brown – Shutterstock / 51 Narongsak Nagadhana – Shutterstock / 55 NicolasMcComber – iStockphoto / 61 Bella D – Shutterstock / 71 dencg – Shutterstock / 81 elena moiseeva – Shutterstock / 87 GIROMIN STUDIO – Shutterstock / 93 Raum: nico_blue – iStockphoto / 95 Tafelschrift: virtualphoto – iStockphoto / 99 PictureLake – iStockphoto / 105 Virgiliu Obada – Shutterstock / 115 mik38 – iStockphoto / 121 rdonar – Shutterstock / 131 Pla2na – Shutterstock / 141 JoannaBoiadjieva – iStockphoto / 151 Helen Hotson – Shutterstock / 161 poligonchik – iStockphoto / 169 Wendy Nero – Shutterstock / 175 Randomphotog – iStockphoto / 181 nurulanga – iStockphoto / 187 vetkit – iStockphoto / 193 Dmitry Vesto – Shutterstock / 203 Andrey Burmakin – Shutterstock / 209 carloshferrari – iStockphoto

MATHETUTOR
Matura AHS

Autorenteam: Thomas Benes, Bojan Radenković
Redaktion: Richard Mesarić
Illustrationen: Georg Flor, Wien
Umschlaggestaltung: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg
Innenlayout: Nathanaël Gourdin & Katy Müller GbR, Leipzig
Satz: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg
Druck: Athesia Druck, Innsbruck

ISBN 978-3-99069-874-7
1. Auflage: A1[1] 2021

mathewerkstatt

Thomas Benes, Bojan Radenković

MATHETUTOR

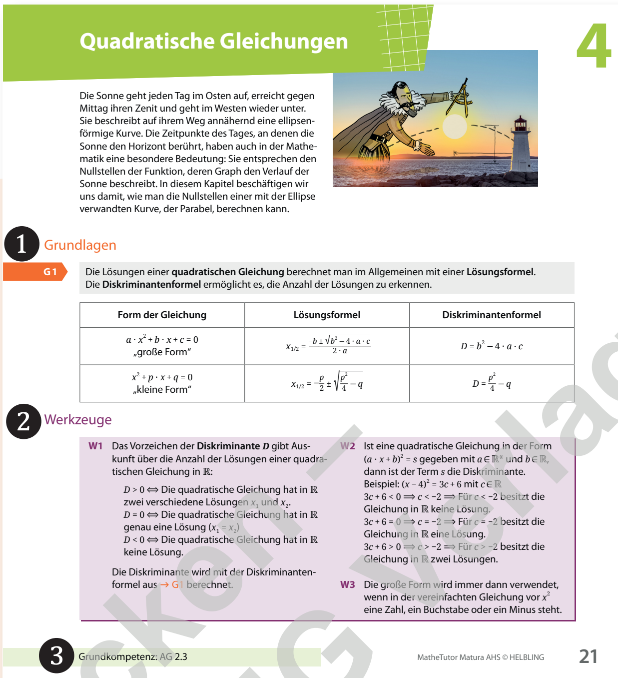
Grundkompetenztraining mit System

Matura AHS

HELBLING

So begleitet dich dein MatheTutor

Ein **Tutor** begleitet durch den Lernprozess und hilft, wenn es schwierig wird.
Dieses Buch ist **dein Tutor** auf dem Weg zur Mathematik-Matura.



4 Quadratische Gleichungen

Die Sonne geht jeden Tag im Osten auf, erreicht gegen Mittag ihren Zenit und geht im Westen wieder unter. Sie beschreibt auf ihrem Weg annähernd eine ellipsenförmige Kurve. Die Zeitpunkte des Tages, an denen die Sonne den Horizont berührt, haben auch in der Mathematik eine besondere Bedeutung: Sie entsprechen den Nullstellen der Funktion, deren Graph den Verlauf der Sonne beschreibt. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns damit, wie man die Nullstellen einer mit der Ellipse verwandten Kurve, der Parabel, berechnen kann.

1 Grundlagen

G 1 Die Lösungen einer **quadratischen Gleichung** berechnet man im Allgemeinen mit einer **Lösungsformel**. Die **Diskriminantenformel** ermöglicht es, die Anzahl der Lösungen zu erkennen.

Form der Gleichung	Lösungsformel	Diskriminantenformel
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ „große Form“	$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$	$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
$x^2 + p \cdot x + q = 0$ „kleine Form“	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$D = \frac{p^2}{4} - q$

2 Werkzeuge

W1 Das Vorzeichen der **Diskriminante D** gibt Auskunft über die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung in $\mathbb{R}$:

$D > 0 \Leftrightarrow$ Die quadratische Gleichung hat in $\mathbb{R}$ zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2.
$D = 0 \Leftrightarrow$ Die quadratische Gleichung hat in $\mathbb{R}$ genau eine Lösung ($x_1 = x_2$)
$D < 0 \Leftrightarrow$ Die quadratische Gleichung hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

Die Diskriminante wird mit der Diskriminantenformel aus → G1 berechnet.

W2 Ist eine quadratische Gleichung in der Form $(a \cdot x + b)^2 = s$ gegeben mit $a \in \mathbb{R}^*$ und $b \in \mathbb{R}$, dann ist der Term s die Diskriminante.
Beispiel: $(x - 4)^2 = 3c + 6$ mit $c \in \mathbb{R}$
$3c + 6 < 0 \Longrightarrow c < -2 \Longrightarrow$ Für $c < -2$ besitzt die Gleichung in $\mathbb{R}$ keine Lösung.
$3c + 6 = 0 \Longrightarrow c = -2 \Longrightarrow$ Für $c = -2$ besitzt die Gleichung in $\mathbb{R}$ eine Lösung.
$3c + 6 > 0 \Longrightarrow c > -2 \Longrightarrow$ Für $c > -2$ besitzt die Gleichung in $\mathbb{R}$ zwei Lösungen.

W3 Die große Form wird immer dann verwendet, wenn in der vereinfachten Gleichung vor x^2 eine Zahl, ein Buchstabe oder ein Minus steht.

3 Grundkompetenz: AG 2.3

MatheTutor Matura AHS © HELBLING 21

1 Informiere dich

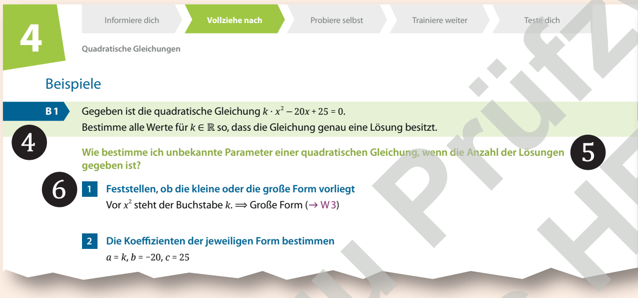
Ein **kurzer Text** stimmt dich auf das Kapitel ein.

Die **Grundlagen** 1 benötigst du im ganzen Kapitel. Lerne oder wiederhole sie, bevor du loslegst.

Praktische **Werkzeuge** 2 stehen dir für einzelne Aufgaben oder Lösungsschritte zur Verfügung. Dein MatheTutor weist dich darauf hin, wenn es sinnvoll ist, sie einzusetzen.

Du erfährst hier auch, welche **Grundkompetenzen** 3 du in diesem Kapitel trainierst.

2 Vollziehe nach



4 Quadratische Gleichungen

Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Beispiele

B 1 Gegeben ist die quadratische Gleichung $k \cdot x^2 - 20x + 25 = 0$.
Bestimme alle Werte für $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Gleichung genau eine Lösung besitzt.

4

Wie bestimme ich unbekannte Parameter einer quadratischen Gleichung, wenn die Anzahl der Lösungen gegeben ist? 5

6

1 Feststellen, ob die kleine oder die große Form vorliegt
Vor x^2 steht der Buchstabe k. $\Longrightarrow$ Große Form (→ W 3)

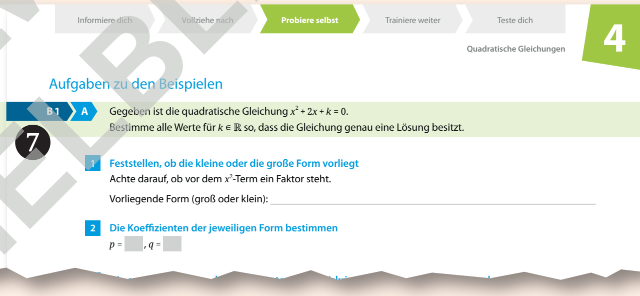
2 Die Koeffizienten der jeweiligen Form bestimmen
$a = k, b = -20, c = 25$

Musterbeispiele 4 zeigen dir Schritt für Schritt, wie du für das Kapitel typische Aufgaben löst.

Leitfragen 5 helfen dir zu erkennen, um welche mathematische Fragestellung es sich handelt.

Modellschritte 6 schlüsseln die Lösung anschaulich auf und unterstützen dich dabei, den Lösungsweg vollständig nachzuvollziehen.

3 Probiere selbst



Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Quadratische Gleichungen 4

Aufgaben zu den Beispielen

B 1 A Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + 2x + k = 0$.
Bestimme alle Werte für $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Gleichung genau eine Lösung besitzt.

7

1 Feststellen, ob die kleine oder die große Form vorliegt
Achte darauf, ob vor dem x^2-Term ein Faktor steht.
Vorliegende Form (groß oder klein): ____________________

2 Die Koeffizienten der jeweiligen Form bestimmen
$p = \square$, $q = \square$

Die **Aufgaben zu den Beispielen** 7 sind wie die Musterbeispiele aufgebaut und ermöglichen es dir, selbst erste Aufgaben zu lösen.

Eine weitere *Probiere selbst*-Seite findest du online.

Hinweise zum Ausfüllen

In kleinen Kästchen trägst du Zahlen oder kurze Terme ein. Achte dabei besonders darauf, keine Vorzeichen oder Klammern zu vergessen.

$4x$ -3 $0{,}25$ (-2)

In großen Kästchen trägst du Zahlen mit vielen (Nachkomma-)Stellen, längere Terme oder Brüche ein.

$-0{,}9987$ $\sqrt{a^2+b^2}$ $\frac{4}{9}$ $-\frac{1}{x^2}$

In Kreisen trägst du Operatoren ein, d. h. die Zeichen:
$+ \quad - \quad : \quad \cdot \quad < \quad \geq \quad > \quad \leq \quad = \quad \neq \quad \approx \quad \parallel \quad \perp$

$\neq$ $\geq$ $+$

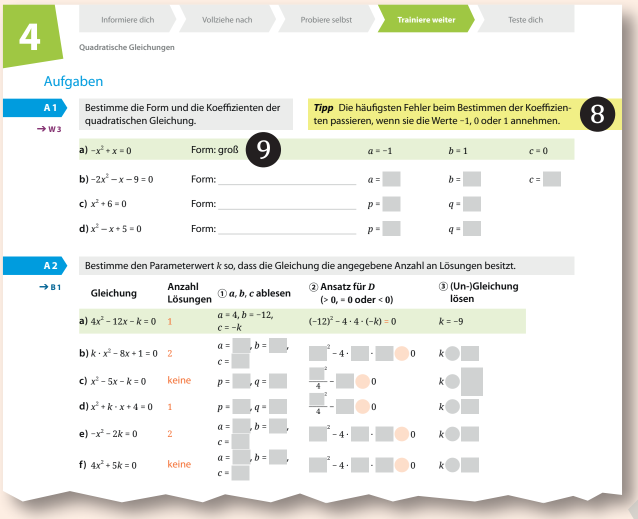
Du kreuzt leere Kästchen an, um die zugehörige Aussage als richtige Lösung zu markieren.

☐ ☒

Auf Schreibzeilen hast du Platz für ganze Rechenzeilen oder Text.

$3x - 17 = -4 \quad | +17$
Die Halbwertszeit beträgt ca. 8 Tage.

4 Trainiere weiter


4
Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Quadratische Gleichungen

Aufgaben

A 1 → W 3 Bestimme die Form und die Koeffizienten der quadratischen Gleichung.

Tipp Die häufigsten Fehler beim Bestimmen der Koeffizienten passieren, wenn sie die Werte −1, 0 oder 1 annehmen. 8

a) $-x^2 + x = 0$	Form: groß 9	$a = -1$	$b = 1$	$c = 0$
b) $-2x^2 - x - 9 = 0$	Form:	$a =$	$b =$	$c =$
c) $x^2 + 6 = 0$	Form:	$p =$	$q =$	
d) $x^2 - x + 5 = 0$	Form:	$p =$	$q =$	

A 2 → B 1 Bestimme den Parameterwert k so, dass die Gleichung die angegebene Anzahl an Lösungen besitzt.

Gleichung	Anzahl Lösungen	① a, b, c ablesen	② Ansatz für D (> 0, = 0 oder < 0)	③ (Un-)Gleichung lösen
a) $4x^2 - 12x - k = 0$	1	$a = 4, b = -12, c = -k$	$(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-k) = 0$	$k = -9$
b) $k \cdot x^2 - 8x + 1 = 0$	2	$a =$, $b =$, $c =$	$\square^2 - 4 \cdot \square \cdot \square \; 0$	k
c) $x^2 - 5x - k = 0$	keine	$p =$, $q =$	$\frac{\square^2}{4} - \square \; 0$	k
d) $x^2 + k \cdot x + 4 = 0$	1	$p =$, $q =$	$\frac{\square^2}{4} - \square \; 0$	k
e) $-x^2 - 2k = 0$	2	$a =$, $b =$, $c =$	$\square^2 - 4 \cdot \square \cdot \square \; 0$	k
f) $4x^2 + 5k = 0$	keine	$a =$, $b =$, $c =$	$\square^2 - 4 \cdot \square \cdot \square \; 0$	k

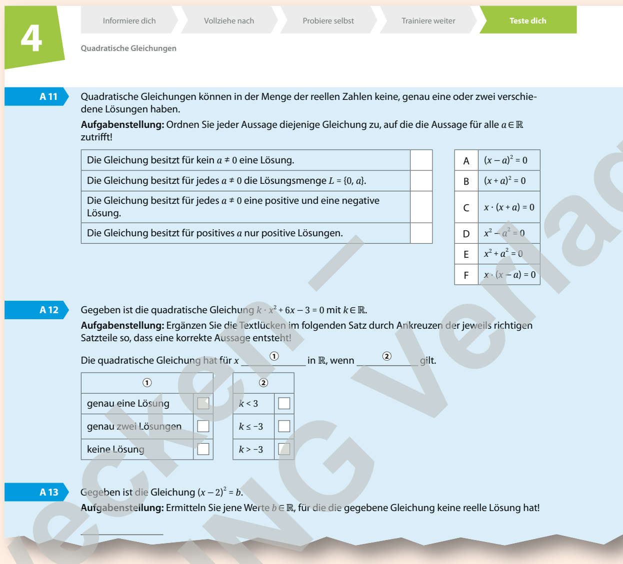
Löse die **Aufgaben** der Reihe nach, sie bauen oft aufeinander auf. Damit trainierst du die Grundkompetenzen des Kapitels.

Die **Tipps** 8 deines MatheTutors solltest du im Hinterkopf behalten.

Musterlösungen 9 sind grün hinterlegt.

Online findest du Lösungen mit Hinweisen und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast. Sie helfen dir oft bei den nächsten Aufgaben.

5 Teste dich


4
Informiere dich | Vollziehe nach | Probiere selbst | Trainiere weiter | Teste dich

Quadratische Gleichungen

A 11 Quadratische Gleichungen können in der Menge der reellen Zahlen keine, genau eine oder zwei verschiedene Lösungen haben.
Aufgabenstellung: Ordnen Sie jeder Aussage diejenige Gleichung zu, auf die die Aussage für alle $a \in \mathbb{R}$ zutrifft!

Die Gleichung besitzt für kein $a \neq 0$ eine Lösung.	
Die Gleichung besitzt für jedes $a \neq 0$ die Lösungsmenge $L = \{0, a\}$.	
Die Gleichung besitzt für jedes $a \neq 0$ eine positive und eine negative Lösung.	
Die Gleichung besitzt für positives a nur positive Lösungen.	

A	$(x - a)^2 = 0$
B	$(x + a)^2 = 0$
C	$x \cdot (x + a) = 0$
D	$x^2 - a^2 = 0$
E	$x^2 + a^2 = 0$
F	$x \cdot (x - a) = 0$

A 12 Gegeben ist die quadratische Gleichung $k \cdot x^2 + 6x - 3 = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$.
Aufgabenstellung: Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die quadratische Gleichung hat für x ___①___ in $\mathbb{R}$, wenn ___②___ gilt.

①	
genau eine Lösung	☐
genau zwei Lösungen	☐
keine Lösung	☐

②	
$k < 3$	☐
$k \leq -3$	☐
$k > -3$	☐

A 13 Gegeben ist die Gleichung $(x - 2)^2 = b$.
Aufgabenstellung: Ermitteln Sie jene Werte $b \in \mathbb{R}$, für die die gegebene Gleichung keine reelle Lösung hat!

Die letzte Seite jedes Kapitels bietet dir **typische Aufgaben im Stil von Teil 1 der Matura**.

Für diese Seite solltest du immer ein eigenes Blatt für die Erstellung der Lösungen bereithalten.

Du kannst für diese Aufgaben Technologie verwenden, sie sind aber auch ohne Technologie lösbar.

In den Online-Lösungen findest du auch für diese Seite Hinweise und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast.

Symbole

Für Zwischenschritte, Nebenrechnungen, Ergebnisse benötigst du hier ein eigenes Blatt.

T Diese Aufgabe wird durch Technologieeinsatz leichter.

T! Diese Aufgabe erfordert Technologieeinsatz. Dieser wird in den Lösungen erläutert.

→ W 2 Hier verwendest du eines der Werkzeuge aus *Informiere dich*. Schlag es bei Bedarf nach.

→ G 2 Diese Aufgabe behandelt eine der Grundlagen aus *Informiere dich*.

→ B 2 Mit dieser Aufgabe wiederholst und festigst du Modellschritte aus einem Musterbeispiel.

Online-Angebot

Wie du Zugang zum Online-Angebot erhältst, erfährst du auf der inneren Umschlagseite des MatheTutors.

Lösungen Lösungen zu allen Aufgaben der aktuellen Seite mit Hinweisen und Erklärungen, auch zum Technologieeinsatz.

Weitere Aufgaben Eine weitere *Probiere selbst*-Seite zum jeweiligen Kapitel. Beschäftige dich bei Bedarf noch intensiver mit den Musterbeispielen.

Modellschritte Die Modellschritte aus allen Kapiteln in einem Dokument praktisch zusammengefasst, zum Nachschlagen, Lernen und Üben.

Inhaltsverzeichnis

AN – Analysis

WS – Wahrscheinlichkeit und Statistik

Teil-2-Aufgaben

Tipps und Hinweise zu den Aufgaben

Zwei wichtige Tipps für das Lösen der Aufgaben

Verwende die Lösungen, um etwaige Unklarheiten zu beseitigen. Tu das aber erst, nachdem du die Aufgabe selbstständig probiert hast.

Skizzen und Nebenrechnungen sind ein wichtiger Bestandteil jeder mathematischen Überlegung. Nimm ein Blatt Papier zur Hand, wenn der Platz im Buch nicht ausreichen sollte.

Aufgabenformate im Teil 1 der Matura

Formate	Hinweise	Beispiele
Offenes Antwortformat	Formuliere eine Antwort in eigenen Worten, z. B. wenn eine Erklärung, Begründung oder Interpretation gefordert ist.	Seite 20 A10
Halboffenes Antwortformat	Ergänze eine teilweise vorgegebene Antwort, z. B. wenn einzelne Werte zu berechnen oder Abbildungen zu ergänzen sind.	Seite 14 A7
Lückentext	Ein Satz mit zwei Lücken ist vorgegeben. Für jede Lücke stehen mögliche Satzteile als Auswahl zur Verfügung. Kreuze jeweils genau einen der drei Satzteile an.	Seite 32 A11
Multiple Choice 2 aus 5	Kreuze die zwei richtigen unter fünf Antwortmöglichkeiten an.	Seite 10 A6
Multiple Choice 1 aus 6	Kreuze die eine richtige unter sechs Antwortmöglichkeiten an.	Seite 92 A11
Zuordnungsformat 4 aus 6	Schreibe in die vier Ausfüllfelder die Buchstaben der richtigen Antworten aus den sechs gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 54 A7
Konstruktionsformat	Ergänze die vorgegebene Abbildung durch ein grafisches Element, z. B. Vektoren oder Funktionsgraphen.	Seite 38 A10 Seite 70 A21

Zusätzliche Aufgabenformate auf den *Trainiere weiter*-Seiten

Formate	Hinweise	Beispiele
Multiple Choice x aus 5	Unter fünf Antwortmöglichkeiten befinden sich eine oder mehrere richtige. Kreuze alle richtigen an.	Seite 135 A8
Multiple Choice x aus y	Kreuze die vorgegebene Anzahl an Antwortmöglichkeiten an. z. B. 1 aus 2, 1 aus 4 oder 2 aus 4.	Seite 13 A1 Seite 18 A4
Zuordnungsformat x aus y	Schreibe in alle Ausfüllfelder die Buchstaben der richtigen Antworten aus den gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 53 A4
Ausfüllen	Große Teile der Antwort sind vorgegeben. Ergänze die richtigen Zahlen, Terme, Symbole oder kurzen Texte.	Seite 18 A3 Seite 25 A6
Schritt für Schritt	Fülle alle Ausfüllkästchen und Schreibzeilen in den vorgegebenen Schritten aus.	Seite 19 A7

Zahlenmengen

Ordnung und Organisation helfen nicht nur im täglichen Leben, den Überblick zu behalten, sondern auch allen, die Mathematik verwenden. So helfen etwa Mengen, eine Vielzahl von Objekten zu überblicken: Wir verstehen unter einer Menge eine Zusammenfassung von Objekten, z. B. Zahlen. Ist ein Objekt a in einer Menge M enthalten, so wird es Element dieser Menge genannt. Das wird symbolisch $a \in M$ geschrieben.

Grundlagen

G 1 Besonders wichtig sind in diesem Kapitel Zahlenmengen, d. h. Mengen, deren Elemente Zahlen sind.

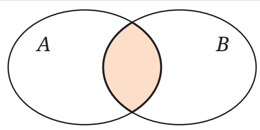
Zahlenmenge	Symbol	Definition	Beispiele
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$	723, aber auch $\sqrt{4} = 2$ und $\frac{5}{1} = 5$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$	-85, aber auch $-\sqrt{9} = -3$ und $\frac{-8}{2} = -4$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$ ist die Menge aller endlichen und periodischen Dezimalzahlen.	Endliche Dezimalzahlen: $5{,}02$; $-0{,}01$ Periodische Dezimalzahlen: $0{,}\dot{3}$; $23{,}\overline{45}$
Irrationale Zahlen	$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$ ist die Menge aller nicht-periodischen unendlichen Dezimalzahlen.	Bestimmte Wurzelausdrücke: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$ Besondere Zahlen: $\pi = 3{,}141...$; $e = 2{,}718...$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ ist die Menge aller Dezimalzahlen.	0; -7; $2{,}3$; $0{,}\dot{2}$; π
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} = \{z = a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	$1 + i$; $\sqrt{-2}$

G 2 Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B (symbolisch $A \subseteq B$), wenn alle Elemente von A auch in B enthalten sind. Eine Teilmenge A heißt **echte Teilmenge** einer Menge B (symbolisch $A \subset B$), wenn die Mengen A und B nicht gleich sind.

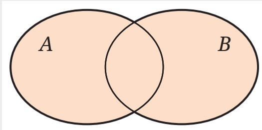
Die Menge $A \backslash B$ wird **Komplement** von B bezüglich A genannt. Sie besteht aus allen Elementen von A, die nicht in B enthalten sind.

Die **Schnittmenge** (Der **Durchschnitt**) $A \cap B$ zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

Die **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die in A oder in B oder in beiden Mengen enthalten sind.



Schnittmenge



Vereinigungsmenge

Eine spezielle Menge ist die sogenannte **leere Menge** { }, die keine Elemente enthält.

Beispiele für weitere spezielle Zahlenmengen: $\mathbb{R}^+$ (positive reelle Zahlen), $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

Werkzeuge

W1 Für $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{I}$ gilt: Zwischen je zwei Zahlen einer der Mengen liegen unendlich viele Zahlen aller drei Mengen.

W2 Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Z. B. ist jede natürliche Zahl auch eine ganze, rationale, reelle und komplexe Zahl. Wichtig: Jede natürliche bzw. ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl, da z. B. $-2 = -2{,}0$ eine endliche Dezimalzahl ist.

W3 Jede rationale Zahl kann als Bruch zweier ganzer Zahlen, d. h. in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, dargestellt werden, z. B. $3{,}4 = \frac{34}{10}$ oder $-0{,}\dot{3} = \frac{-1}{3}$.

W4 Die reellen Zahlen unterteilen sich in rationale und irrationale Zahlen, d. h. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, wobei $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \{\}$.

Beispiel

B 1 Gegeben ist die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x < 2\} = [-3; 2)$.
Bestimme die Anzahl aller Elemente sowie die kleinste (Minimum) und die größte Zahl (Maximum) in M.
Welche Elemente aus M sind in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ enthalten?

Wie bestimme ich die wichtigsten Eigenschaften einer gegebenen Zahlenmenge M?

1 M als Teilmenge einer bestimmten Zahlenmenge erkennen und die Grenzen bestimmen

Die Zahlenmenge, deren Teilmenge M ist, erkennen wir anhand der Angabe $x \in$ …
M ist eine Teilmenge von: $\mathbb{R}$
Untere Grenze: -3
Obere Grenze: 2

2 Anzahl der Elemente sowie Minimum und Maximum bestimmen

Anzahl der Elemente: unendlich viele (Zwischen -3 und 2 liegen laut ➔ W1 unendlich viele reelle Zahlen.)
Minimum von M: -3 (Die untere Grenze ist wegen $\le$ bzw. [in M enthalten.)
Maximum von M: gibt es nicht (Die obere Grenze ist wegen $<$ bzw.) nicht in M enthalten.)

3 Die Schnittmengen von M mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bilden

Wir bestimmen nacheinander alle natürlichen, ganzen, rationalen, irrationalen, reellen und komplexe Zahlen in M (➔ G1 und ➔ G2):

$M \cap \mathbb{N} = \{0, 1\}$
$M \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
$M \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid -3 \le x < 2\}$
$M \cap \mathbb{I} = \{x \in \mathbb{I} \mid -3 \le x < 2\}$
$M \cap \mathbb{R} = M$
$M \cap \mathbb{C} = M$

Aufgabe zum Beispiel

B 1 A Gegeben ist die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid -2 < x \le 4\}$.
Bestimme die Anzahl aller Elemente sowie die kleinste (Minimum) und die größte Zahl (Maximum) in M.
Welche Elemente aus M sind in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ enthalten?

1 M als Teilmenge einer bestimmten Zahlenmenge erkennen und die Grenzen bestimmen

M ist eine Teilmenge von: ______

Untere Grenze: ______

Obere Grenze: ______

2 Anzahl der Elemente sowie Minimum und Maximum bestimmen

Anzahl der Elemente von M: ______________________

Minimum von M: ______________________

Maximum von M: ______________________

3 Die Schnittmengen von M mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bilden

$M \cap \mathbb{N} = \{$ ______________ $\}$

$M \cap \mathbb{Z} = \{$ ______________ $\}$

$M \cap \mathbb{Q} =$ ______________

$M \cap \mathbb{I} =$ ______________

$M \cap \mathbb{R} =$ ______________

$M \cap \mathbb{C} =$ ______________

Aufgaben

A 1 Bestimme die untere und die obere Grenze der Zahlenmenge.

	a) $(5; 11]$	**b)** $[3; 5)$	**c)** $\{x \in \mathbb{Q} \mid -4 \leq x < 13\}$	**d)** $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$	**e)** $[6; \infty)$
Untere Grenze	5	______	______	______	______
Obere Grenze	11	______	______	______	______

A 2 Bestimme die Anzahl der Elemente der Zahlenmenge sowie ihr Minimum und Maximum.

→ W 1

	Anzahl der Elemente	**Minimum**	**Maximum**
a) $(-2; 9]$	unendlich viele	gibt es nicht	9
b) $[3; 5)$	______	______	______
c) $\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x \leq 6\}$	______	______	______
d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$	______	______	______
e) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -4 \leq x < 13\}$	______	______	______

A 3 Gegeben ist die Menge
$M = \{-2{,}7;\ 0;\ \pi;\ 2 + i;\ 3 \cdot 10^{-2};\ -9{,}25 \cdot 10^2;\ \sqrt{27};\ \sqrt[3]{27};\ \sqrt{\frac{9}{16}};\ 8{,}\dot{5}\}$.
Bilde die angegebenen Schnittmengen.

→ G 1–G 2

T

Tipp Bestimme zuerst mit dem Taschenrechner die Dezimaldarstellungen der Zahlen.

$M \cap \mathbb{N} = \{0, \sqrt[3]{27}\}$ $\quad$ $M \cap \mathbb{I} =$ ______ $\quad$ $M \cap \mathbb{Q} = M \backslash \{$ ______ $\}$

$M \cap \mathbb{Z} =$ ______ $\quad$ $M \cap \mathbb{C} =$ ______ $\quad$ $M \cap \mathbb{R} = M \backslash \{$ ______ $\}$

A 4 Berechne den Ausdruck und kreuze alle Zahlenmengen an, in denen das Ergebnis liegt.

→ W 2

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} =$ ______	☐	☐	☐	☐	☐	☐
b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} =$ ______	☐	☐	☐	☐	☐	☐
c) $\sqrt{-4} =$ ______	☐	☐	☐	☐	☐	☐
d) $10^5 \cdot 10^{-7} =$ ______	☐	☐	☐	☐	☐	☐
e) $3 \cdot \pi =$ ______	☐	☐	☐	☐	☐	☐

A 5 Kreuze alle Zahlenmengen an, für die die Aussage zutrifft.

→ W1–W4

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
a) Jede Zahl in dieser Menge kann als Bruch ganzer Zahlen dargestellt werden.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
b) Die Menge hat ein Minimum.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
c) Die Menge enthält sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
d) Zwischen den Zahlen −1 und 1 liegen unendlich viele Zahlen dieser Menge.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
e) Die Quadratwurzel jedes Elements dieser Menge ist eine irrationale Zahl.	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Lösungen

A 6 **Aufgabenstellung:** Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

0 liegt in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{N}$.	☐
$\frac{\pi}{2}$ liegt in $\mathbb{I}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$.	☐
$\sqrt{\frac{16}{49}}$ liegt in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$.	☐
$-\sqrt{10}$ liegt in $\mathbb{Z}$, aber nicht in $\mathbb{N}$.	☐
$3{,}\dot{3}$ liegt in $\mathbb{C}$, aber nicht in $\mathbb{I}$.	☐

A 7 Gegeben ist eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Aufgabenstellung: Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Zahl x^{-1} liegt sicher in der Zahlenmenge ___①___, da der Kehrwert von x ___②___.

①	
$\mathbb{N}$	☐
$\mathbb{Z}$	☐
$\mathbb{Q}$	☐

②	
eine natürliche Zahl sein kann	☐
von der Form $\frac{b}{a}$ mit $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist	☐
einen negativen Bruch ergibt	☐

A 8 **Aufgabenstellung:** Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Zwischen den Zahlen 0,99 und 1 liegen unendlich viele irrationale Zahlen.	☐
Zahlen der Form $\sqrt{z}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ liegen in $\mathbb{C}$, aber nicht in $\mathbb{R}$.	☐
Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.	☐
Das Quadrat einer reellen Zahl kann eine negative Zahl ergeben.	☐
Es gibt eine irrationale Zahl, die als Bruch ganzer Zahlen dargestellt werden kann.	☐

A 9 Gegeben ist die Teilmenge der positiven rationalen Zahlen $M = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x < 13\}$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden für die Menge M zutreffenden Aussagen an!

In M liegen unendlich viele rationale Zahlen und unendlich viele ganze Zahlen.	☐
In M gibt es ein Minimum.	☐
In M gibt es eine größte natürliche Zahl.	☐
Zwischen den Zahlen 12,99 und 13 liegen unendlich viele Zahlen aus M.	☐
In M gibt es mindestens eine Zahl, die nicht in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ darstellbar ist.	☐

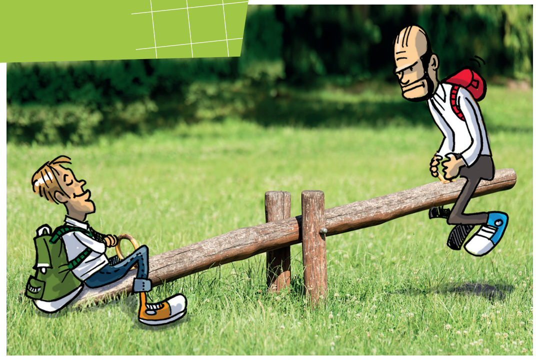
A 10 Gegeben sind die Menge $M = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ und eine negative ganze Zahl $a \neq -1$.

Aufgabenstellung: Geben Sie eine Zahl $b \in M$ an, sodass $a \cdot b$ eine natürliche Zahl ergibt.

$b =$ ____________

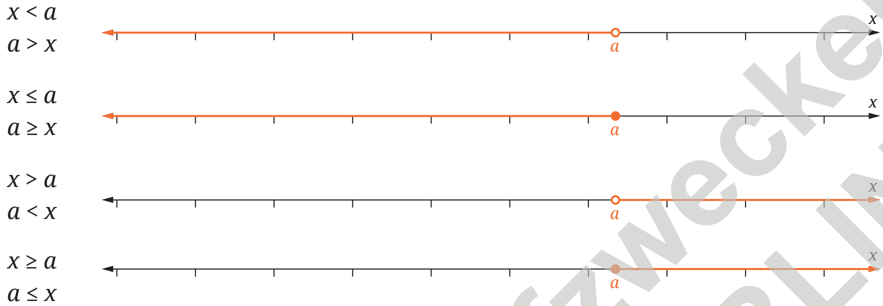
Ungleichungen

Vieles, das wir miteinander vergleichen, ist in zahlreichen Eigenschaften verschiedenartig:
Sommer – Winter, Tag – Nacht, Gemüse – Fleisch, …
Unterschiede werden jedoch messbar, wenn es gemeinsame Maßstäbe gibt.
In der Mathematik machen Ungleichungen Unterschiede durch die Verwendung von Zahlen und Termen rechnerisch erfassbar.



Grundlagen

G 1 Eine **lineare Ungleichung** in einer Variablen (hier x) kann immer in eine der folgenden **elementaren Ungleichungen** umgeformt werden. Die **Lösungsmenge** ist jeweils auf der Zahlengeraden dargestellt und in Intervallschreibweise angegeben:



$L = (-\infty; a)$

$L = (-\infty; a]$

$L = (a; \infty)$

$L = [a; \infty)$

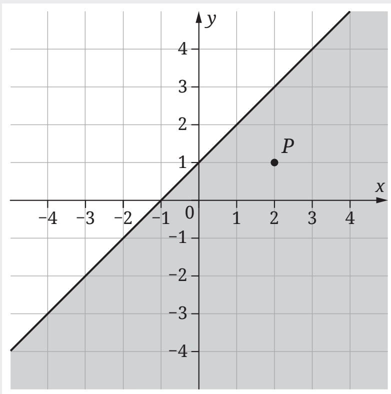
G 2 **a)** Um eine lineare Ungleichung in eine der elementaren Ungleichungen umzuformen, geht man wie beim Lösen von Gleichungen vor:
1. Alle Klammern auflösen
2. Alle Terme, die die Variable x enthalten, mithilfe von Strichrechnungen auf eine Seite der Ungleichung bringen
3. Eventuell noch erforderliche Punktrechnungen durchführen

b) Multipliziert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl oder dividiert sie durch eine negative Zahl, so wechselt dadurch das Vergleichszeichen die Richtung, z. B. von < auf > oder von ≥ auf ≤.

G 3 **a)** Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung in zwei Variablen kann geometrisch als Halbebene im ebenen Koordinatensystem dargestellt werden. Die nebenstehende Grafik zeigt ein Beispiel für die Variablen x und y.

b) Ein Punkt befindet sich genau dann im markierten Lösungsbereich, wenn er, eingesetzt in die Ungleichung, eine wahre Aussage ergibt.

Beispiel: Die Ungleichung zum nebenstehend dargestellten Lösungsbereich lautet $y \leq x + 1$. Der Punkt $P = (2 \mid 1)$ befindet sich im Lösungsbereich, da das Einsetzen seiner Koordinaten in die Ungleichung eine wahre Aussage ergibt: $1 \leq 2 + 1$.



Beispiel

B 1 Gegeben ist die lineare Ungleichung $7 - 4 \cdot (2 - x) < 5 + 2x$.
Löse die Ungleichung nach $x \in \mathbb{R}$ auf und stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.

Wie bestimme ich die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung rechnerisch und stelle sie grafisch dar?

1 Die Klammern auflösen und auf jeder Seite zusammenfassen

$7 - 8 + 4x < 5 + 2x$
$-1 + 4x < 5 + 2x$

2 Die Ungleichung nach x umformen

Wir merken uns, alle Umformungen mit Strichrechnungen zuerst durchzuführen und erst dann jene mit Punktrechnungen. So bringen wir alle Terme mit der Variablen x auf die eine Seite der Ungleichung und alle Terme ohne x auf die andere Seite (→ G2a).

Variante 1: Zahlen links, Terme mit x rechts

$-1 + 4x < 5 + 2x$	$\mid -4x$
$-1 < 5 - 2x$	$\mid -5$
$-6 < -2x$	$\mid : (-2)$
$3 > x$	→ G2b

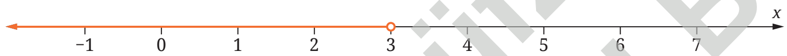
Variante 2: Terme mit x links, Zahlen rechts

$-1 + 4x < 5 + 2x$	$\mid -2x$
$-1 + 2x < 5$	$\mid +1$
$2x < 6$	$\mid : 2$
$x < 3$	

Lösungsmenge: $L = (-\infty; 3)$

3 Die erhaltene Zahl auf der Zahlengeraden markieren und die Lösungsmenge einzeichnen

Das Zeichen < bedeutet, dass die Zahl 3 nicht mehr in der Lösungsmenge enthalten ist (→ G1).



Aufgabe zum Beispiel

B 1 A Gegeben ist die lineare Ungleichung $-3 \cdot (5 - 2x) \leq 13 + 20x$.
Löse die Ungleichung nach $x \in \mathbb{R}$ auf und stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.

1 Die Klammern auflösen und auf jeder Seite zusammenfassen

______ ______ $\leq 13 + 20x$

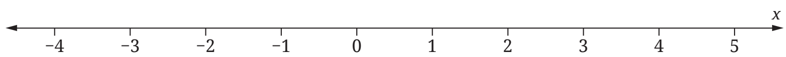
2 Die Ungleichung nach x umformen

Bringe zuerst mit Strichrechnungen alle Terme mit Variablen auf die eine und die Zahlen auf die andere Seite.

______ $\leq 13 + 20x$	$\mid$ ______
______ $\leq$ ______	$\mid$ ______
______ $\leq$ ______	$\mid$ ______
______ ● ______	

Lösungsmenge: L = ______

3 Die erhaltene Zahl auf der Zahlengeraden markieren und die Lösungsmenge einzeichnen



Aufgaben

A 1 Kreuze diejenige Ungleichung an, deren Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dargestellt ist.

→ G1–G2

$-1 \le -x$	☐
$x - 1 \ge 0$	☐
$-x < -1$	☐
$0 > x - 1$	☐

A 2 Überprüfe, ob der Punkt P im Lösungsbereich der gegebenen Ungleichung liegt.

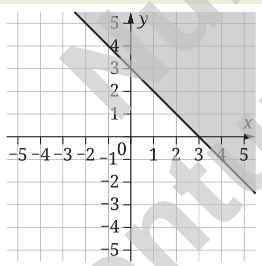
→ G3b

	Punkt einsetzen	w. A./f. A.	Antwort
a) $P = (1\,|\,2)$; $2y \le -\frac{1}{3} \cdot x + 4$	$2 \cdot 2 \le -\frac{1}{3} \cdot 1 + 4 \Leftrightarrow 4 \le 3{,}6...$	f. A.	nein
b) $P = (4\,|\,1)$; $4y \ge \frac{1}{2} \cdot x + 3$	$4 \cdot$ ___ $\ge \frac{1}{2} \cdot$ ___ $+ 3 \Leftrightarrow$ ___ $\ge$ ___		
c) $P = (0\,|\,2)$; $y \ge 2x + 2$			
d) $P = (1\,|\,0)$; $y \le -2x + 5$			
e) $P = (3\,|\,-2)$; $3x + 5y > -2$			
f) $P = (5\,|\,6)$; $x > 5$			

A 3 Jede der abgebildeten Halbebenen stellt die Lösungsmenge einer der Ungleichungen A, B, C oder D dar.
Wähle für jede Halbebene einen Gitterpunkt, der nur in dieser einen Halbebene (und in keiner der anderen) liegt. Überprüfe rechnerisch, welche der Ungleichungen dieser Punkt löst. Ordne anschließend die richtige Ungleichung zu.

A: $y \le 2x - 5$ B: $y \ge -x + 3$ C: $y \le -4x$ D: $y \le -1$

→ G3



z. B. $P = (0\,|\,4)$

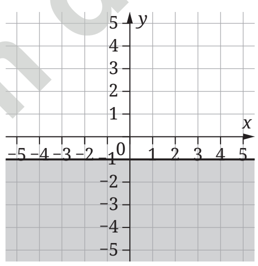
A: $4 \le 2 \cdot 0 - 5$ f. A.

B: $4 \ge -0 + 3$ w. A.

C: $4 \le -4 \cdot 0$ f. A.

D: $4 \le -1$ f. A.

Antwort: Ungleichung B

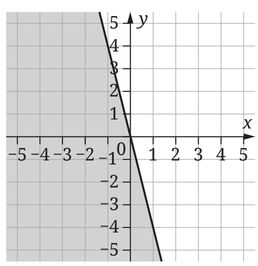


A: ___ $\le 2 \cdot$ ___ $- 5$ ______

B: ___ $\ge -$ ___ $+ 3$ ______

C: ___ $\le -4 \cdot$ ___ ______

D: ___ ≤ -1 ______

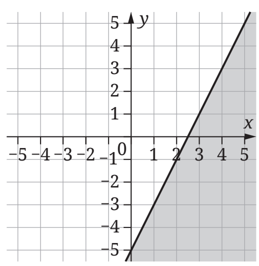


A:

B:

C:

D:



A:

B:

C:

D:

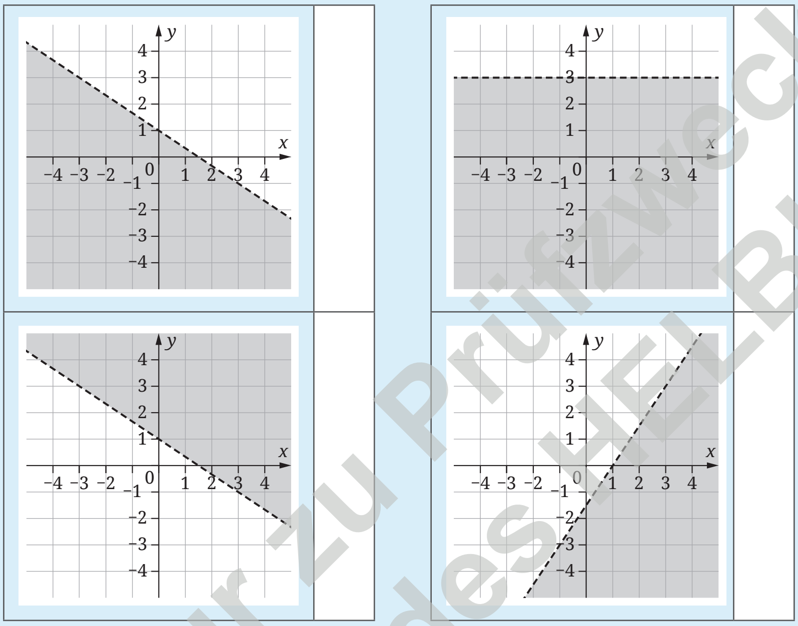
A 4 Gegeben ist die lineare Ungleichung $3x - 5y \leq -3$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden Zahlenpaare an, die Lösungen der Ungleichung sind!

$(-3 \mid -1)$	☐
$(1 \mid -1)$	☐
$(4 \mid 3)$	☐
$(0 \mid -5)$	☐
$(-1 \mid -1)$	☐

A 5 Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung in zwei Variablen kann geometrisch als Halbebene im ebenen Koordinatensystem dargestellt werden.

Aufgabenstellung: Ordnen Sie den abgebildeten Halbebenen jeweils diejenige lineare Ungleichung zu, die den markierten Bereich im Koordinatensystem richtig beschreibt!



A	$y < 3$
B	$3y + 2x < 3$
C	$3x - 2y > 3$
D	$3x + 2y > 3$
E	$x < 3$
F	$4x + 6y > 6$

A 6 Gegeben ist die lineare Ungleichung in zwei Variablen $3x - 4y \geq 7$.

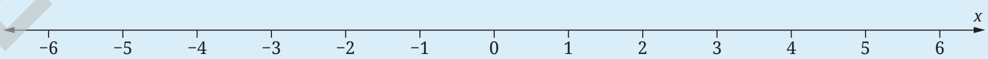
Aufgabenstellung: Geben Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$ an, sodass der Punkt $(a \mid 2)$ eine Lösung der Ungleichung ist!

____

A 7 Gegeben ist die Ungleichung $-3 \cdot (x + 1) < x + 9$ in der Variablen x.

Aufgabenstellung: Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung in $\mathbb{R}$ an und stellen Sie sie auf der nachstehenden Zahlengeraden dar!

L = ______________________________



A 8 Ein Gast eines Restaurants beschließt, den Rechnungsbetrag auf die nächste ganze Zahl zu erhöhen, um Trinkgeld zu geben. Er bezahlt insgesamt 15 Euro.

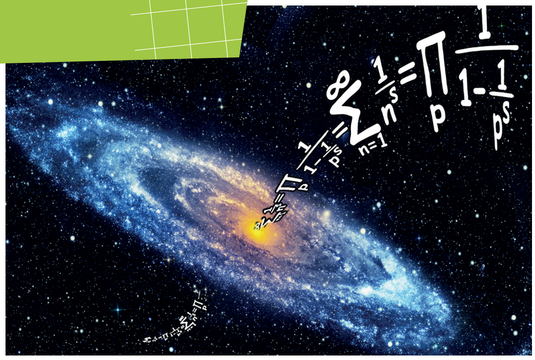
Aufgabenstellung: Geben Sie das größtmögliche Intervall für den Rechnungsbetrag an!

Der Rechnungsbetrag liegt im Bereich ______________________________.

Terme und Formeln

3

Wäre es nicht schön, eine Formel zu haben, mit der man alles berechnen kann? Wir müssten nie wieder darüber nachdenken, was wir anziehen sollen oder wohin die nächste Reise geht. Viele Formeln haben gemeinsam, dass sie die Wirklichkeit in der Sprache der Mathematik beschreiben. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie man Formeln aufstellt und gewisse Sachverhalte so für Berechnungen zugänglich macht.



Grundlagen

G 1

Ein **Term** ist ein sinnvoller mathematischer Ausdruck aus Zahlen, Variablen, Klammern und Rechenzeichen. Man verwendet Terme, um einen in Worten dargestellten Sachverhalt in mathematische Symbole umzuwandeln und so für Berechnungen zugänglich zu machen. Terme sind z. B. in Formeln und Gleichungen enthalten.

Zwei Terme oder Formeln sind **äquivalent**, wenn sie durch korrekte mathematische Umformungen in dieselbe Gestalt gebracht werden können.

Beispiel: Die Terme $\frac{a}{b}$, $a \cdot \frac{1}{b}$ und $a \cdot b^{-1}$ sind äquivalent, da $a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$.

Eine **Formel** dient der Berechnung einer gesuchten Größe aus anderen Größen, z. B. $E = m \cdot c^2$.

G 2

Folgende Umwandlungen von Texten in Terme oder Gleichungen kommen häufig vor:

Text	Term	Text	Gleichung
„p Prozent von G"	$\frac{p}{100} \cdot G$	„a ist um x größer als b."	$a = b + x$
„G (wird) um p Prozent erhöht"	$G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$	„a ist um x kleiner als b."	$a = b - x$
„G (wird) um p Prozent vermindert"	$G \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$	„a ist x-mal so groß wie b."	$a = b \cdot x$

G 3

Der **Durchschnittswert** einer Größe 1 pro einer Größe 2 (der Bezugsgröße) wird wie folgt berechnet:

$$\text{Durchschnitt} = \frac{\text{Summe der Werte von Größe 1}}{\text{Summe der Werte von Größe 2}}$$

Beispiel: Durchschnitt der Reisekosten pro Person $= \frac{\text{Summe der Reisekosten}}{\text{Summe (Anzahl) der Personen}}$

Werkzeuge

W1 Der Gesamtwert einer Größe wird als Produkt aus Durchschnitt und Bezugsgröße des Durchschnitts berechnet:

$$\text{Gesamtwert einer Größe} = \underbrace{\text{Wert der Größe pro Bezugsgröße}}_{\text{Durchschnitt}} \cdot \underbrace{\text{Bezugsgröße}}_{\text{Anzahl bzw. Menge}}$$

Die Bezugsgröße ist daran erkennbar, dass sie nach „pro" steht.

Beispiele:
Gesamtmitarbeiteranzahl = Mitarbeiteranzahl pro Abteilung · Anzahl der Abteilungen
Gesamteinnahmen = Einnahmen pro Person · Anzahl der Personen
Gesamtspritkosten = Spritkosten pro Liter · verbrauchte Liter

W2 Die Formel Wert einer Größe = Wert der Größe pro Bezugsgröße · Bezugsgröße gilt allgemein. Statt mit Größen kann sie auch mit Einheiten geschrieben werden. Mit einem **Einheitencheck** kann geprüft werden, ob sie richtig aufgestellt wurde.

Beispiele:

Mietpreis = Mietpreis pro m^2 · Flächeninhalt	Wassermenge = Wassermenge pro Stunde · Stunden
€ = €/m^2 · m^2 ✓	Liter = Liter/h · h ✓

Beispiele

B 1 Aufgrund schwankender Nachfrage benötigt eine Schokoladenfabrik für die Herstellung von Milchschokolade im Laufe eines Jahres unterschiedliche Mengen an Kakao: im Frühling x Tonnen, im Sommer nur die Hälfte davon, im Herbst um 20 % weniger als im Frühling und im Winter y Tonnen mehr als im Frühling.
Stelle eine Formel für die Gesamtjahresmenge G an Kakao in Tonnen auf.

Wie erstelle ich eine Formel aus den Teilstücken einer Textangabe?

1 Eine Übersicht der Textteile aus der Angabe erstellen

2 Die Textteile in Terme umwandeln

Wir verwenden dafür → G2.

Frühling:	x	$\longrightarrow$	x
Sommer:	die Hälfte von x	$\longrightarrow$	$\frac{x}{2}$ oder $0{,}5 \cdot x$
Herbst:	um 20 % weniger als x	$\longrightarrow$	$x \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 0{,}8 \cdot x$
Winter:	um y mehr als x	$\longrightarrow$	$x + y$

3 Die einzelnen Terme zu einer Formel zusammensetzen

Da die Gesamtmenge für das Jahr gesucht ist und die einzelnen Terme aus Schritt 2 die benötigten Kakaomengen für jede Jahreszeit angeben, addieren wir alle Terme.

$$G = x + 0{,}5 \cdot x + 0{,}8 \cdot x + x + y \quad \Longrightarrow \quad G = 3{,}3 \cdot x + y$$

B 2 In einem Wohnblock gibt es r Wohnungen mit einem durchschnittlichen Energieverbrauch pro Wohnung von x Kilowattstunden (kWh). Stelle eine Formel für die Gesamtenergiekosten G des Wohnblocks auf, wenn beim städtischen Energielieferanten 1 000 kWh k Euro kosten.

Wie erstelle ich die Formel für eine Gesamtgröße bei gegebenen Durchschnittswerten?

1 Die gesuchte Größe als „Durchschnitt · Bezugsgröße des Durchschnitts" schreiben

Wir halten uns an das in → W 1 dargestellte Muster:

Gesamtwert einer Größe = Wert der Größe pro Bezugsgröße · Bezugsgröße.

Die Bezugsgröße finden wir im Text nach dem Wort „pro".

Gesamtenergiekosten des Wohnblocks = Energiekosten pro Wohnung · Anzahl der Wohnungen

G = Energiekosten pro Wohnung $\cdot\, r$

2 Schritt 1 mit jeder Größe wiederholen, die noch nicht durch einen Term ersetzt wurde

Wir benötigen noch die Energiekosten pro Wohnung. Sie sind in der Angabe nicht direkt gegeben. Die Energiekosten für 1 000 kWh betragen k Euro, daher kostet eine kWh $\frac{k}{1000}$ Euro.

Energiekosten pro Wohnung = Energiekosten pro kWh · Anzahl der verbrauchten kWh

Energiekosten pro Wohnung $= \frac{k}{1000} \cdot x$

3 Die einzelnen Terme zu einer Formel zusammensetzen

$$G = \frac{k}{1000} \cdot x \cdot r$$

Aufgaben zu den Beispielen

B 1 A Florians Eltern haben ihrem Sohn in jedem Jahr der Oberstufe bestimmte Beträge an Taschengeld gegeben. In der 5. Klasse erhielt er insgesamt x Euro. Wegen schlechter Schulnoten gaben ihm seine Eltern in der 6. Klasse insgesamt um 20 % weniger als im Jahr davor. In der 7. und 8. Klasse waren seine Noten besser und er bekam jeweils doppelt so viel wie in der 6. Klasse. Berechne, wie viel Taschengeld Florian über die gesamte Oberstufe durchschnittlich pro Jahr bekommen hat.

1 Eine Übersicht der Textteile aus der Angabe erstellen

2 Die Textteile in Terme umwandeln

5. Klasse: ____________ → ____________

6. Klasse: ____________ → ____________

7. Klasse: ____________ → ____________

8. Klasse: ____________ → ____________

3 Die einzelnen Terme zu einer Formel zusammensetzen

Gesucht ist ein Durchschnitt. Schlage die Formel für den Durchschnitt in → G3 nach und setze ein.

Größe 1: Summe der Taschengelder = ____________ = ☐

Größe 2: Anzahl der Jahre = ☐

Durchschnittliches Taschengeld = ____________

B 2 A In einer Firma mit a Abteilungen arbeiten pro Abteilung durchschnittlich b Personen. Jede Person bezieht im Mittel x Euro Gehalt pro Jahr. Stelle eine Formel für die monatlichen Gehaltsausgaben G der Firma auf.

1 Die gesuchte Größe als „Durchschnitt · Bezugsgröße des Durchschnitts" schreiben

Beachte, dass x für das Gehalt einer Person pro Jahr steht, aber das Gehalt pro Monat gefragt ist.

Monatliche Gehaltsausgaben =
= mittleres monatliches Gehalt einer ____________ · Anzahl der ____________

$G = \frac{☐}{☐}$ · Anzahl der ____________

2 Schritt 1 mit jeder Größe wiederholen, die noch nicht durch einen Term ersetzt wurde

Anzahl der Personen =
= Durchschnittliche Personenanzahl pro ____________ · Anzahl der ____________

Anzahl der Personen = ☐ · ☐

3 Die einzelnen Terme zu einer Formel zusammensetzen

$G = \frac{☐}{☐}$ · ☐ · ☐

Aufgaben

A 1 Wandle die Phrase in einen Term bzw. eine Gleichung um.

→ G 2

a) die Hälfte von p ⟶ ______

b) das Dreifache von x ⟶ ______

c) um 5 mehr als a ⟶ ______

d) m ist um 7 kleiner als b ⟶ ______

e) drei Viertel von A sind das Quadrat von a ⟶ ______

f) 10 % von x ⟶ ______

g) p % von 500 ⟶ ______

h) um 40 % mehr als y ⟶ ______

i) um 70 % weniger als b ⟶ ______

j) K wächst um 5 % ⟶ ______

A 2 Wandle den Text in einen Term bzw. eine Gleichung um.

→ G 2

a) Ein Händler erhält vom Lieferanten einer Ware mit Preis P einen Nachlass von 5 %, verkauft sie aber selbst um 20 % teurer weiter. Berechne den neuen Preis N.
Zwischenschritt (optional): $N = \left[P \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)\right] \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right)$
Ergebnis: $N = P \cdot 0{,}95 \cdot 1{,}20 = 1{,}14 \cdot P$

b) Der Preis P einer Ware wird zuerst um 30 % erhöht und danach um 30 % gesenkt. Berechne den neuen Preis N.
c) Auf ein Konto mit Guthaben E Euro wird ein Betrag in Höhe von 15 % des bestehenden Guthabens eingezahlt und anschließend 8 % des neuen Guthabens abgebucht. Wie lautet der neue Kontostand K?
d) Der Bruttopreis (= um 20 % erhöhter Nettopreis) einer Ware wird um 5 % vermindert. Berechne den neuen Bruttopreis P, ausgehend vom ursprünglichen Nettopreis N der Ware.

A 3 Setze den mathematischen Operator +, −, · oder : ein, der eine korrekte Gleichung ergibt.

a) Durchschnittliche Anzahl der Pralinen pro Packung = Gesamtzahl der Pralinen ◯ Anzahl der Packungen

b) Reisegewicht pro Person = Gewicht Handgepäck pro Person ◯ Gewicht Frachtgepäck pro Person

c) Geflossene Wassermenge = Durchflussmenge pro Minute ◯ Anzahl der Minuten

d) Anzahl der Personen ohne Brille = Gesamtzahl der Personen ◯ Anzahl der Personen mit Brille

e) Gesprächsgebühr pro Monat = Kosten pro Minute ◯ telefonierte Minuten pro Monat

A 4 Kreuze das korrekte Produkt an.

→ W1–W2

Tipp Einheitencheck: Stehen im Anschluss an „pro" zwei mit „und" verknüpfte Größen, sind beide Bezugsgrößen. Beispiel: „Unfälle pro Tag und Straßenkilometer" wird zu $\frac{\text{Unfälle}}{\text{Tag} \cdot \text{km}}$.

a) Liter pro km · Kosten pro Liter = ☒ Kosten pro km ☐ Strecke in km
Einheitencheck: $\frac{\text{L}}{\text{km}} \cdot \frac{€}{\text{L}} = \frac{€}{\text{km}}$

b) Verbrauch in kWh pro Monat · Preis pro kWh = ☐ Monate pro kWh ☐ Kosten pro Monat

c) Waren pro Einkauf · Einkäufe pro Person = ☐ Personen pro Einkauf ☐ Waren pro Person

d) Regenmenge pro Tag und Gebiet · Anzahl der Tage = ☐ Regenmenge pro Tag ☐ Regenmenge pro Gebiet

e) Downloads pro App und User · Anzahl der User = ☐ Downloads pro App ☐ Downloads pro User

A 5

In einer Siedlung mit x Grundstücken beträgt in einem Jahr der durchschnittliche Wasserverbrauch pro Grundstück im Haus y Liter und im Garten z Liter. Ein Liter Wasser kostet a Euro. Auf einem Grundstück leben im Schnitt b Personen.

Drücke die Größe als Term aus:
a) Anzahl der Einwohnerinnen und Einwohner der Siedlung
b) Wasserkosten pro Grundstück und Person in einem Jahr
c) Wasserkosten der gesamten Siedlung in einem Jahr

Interpretiere den Ausdruck:
d) $y + z$ **e)** $\frac{z \cdot a}{12}$ **f)** $x \cdot (y + z)$

A 6

Stelle eine Formel für den gesuchten Durchschnitt auf.

→ G 3

a) Ein Tischler verkauft zwei Stuhlmodelle: *Comfort* und *Relax*. Der Stuhl *Comfort* wird zum Einzelpreis P im Set zu x Stück und der Stuhl *Relax* zum Einzelpreis Q Euro im Set zu y Stück verkauft. Berechne den Durchschnittspreis pro Stuhl.

Zwischenschritt (optional):
Gesamtpreis $= P \cdot x + Q \cdot y$
Anzahl der Stühle $= x + y$

Ergebnis:
$D = \frac{P \cdot x + Q \cdot y}{x + y}$

b) In einem Stall befinden sich P Pferde, K Kühe und S Schweine. Der Unterhalt kostet für jedes Pferd p_1 Euro, für jede Kuh p_2 Euro und für jedes Schwein p_3 Euro. Berechne den durchschnittlichen Unterhalt U pro Tier.
c) In einem Kraftwerk gibt es zwei Maschinen. Maschine A erzeugt a KWh elektrischen Strom pro Tag und läuft x Tage. Maschine B erzeugt b KWh Strom pro Tag und ist y Tage in Betrieb. Berechne die durchschnittlich erzeugte Strommenge E pro Tag.

A 7

Umformen von Formeln auf eine gesuchte Größe: Gehe in den vorgegebenen Schritten vor und gib nur das positive Ergebnis an. Nicht immer ist jeder Schritt nötig. Du kannst das Ergebnis mithilfe von Technologie überprüfen.

	1. Strichrechnung	2. Punktrechnung	3. Potenzrechnung
a) $E = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v^2}{2}$, $v = ?$	$E - m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2}$	$\frac{2\,(E - m \cdot g \cdot h)}{m} = v^2$	$v = \sqrt{\frac{2\,(E - m \cdot g \cdot h)}{m}}$
b) $s = s_0 + \frac{g \cdot t^2}{2}$, $t = ?$			
c) $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$, $r = ?$			
d) $W = W_0 + \frac{k \cdot x^2}{2}$, $k = ?$			

A 8

→ G 1

Kreuze diejenigen zwei der drei Formeln bzw. Gleichungen an, die äquivalent sind.

Tipp Statt umzuformen kannst du selbst gewählte Zahlen (verschieden und ungleich null) einsetzen und die Ergebnisse vergleichen.

a) ☐ $O = r^3 \cdot \pi \cdot s$ — $2^3 \cdot \pi \cdot 3 = 24\pi$ ☒ $O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$ — $2\pi \cdot (2 + 3) = 10\pi$ ☒ $O = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$ — $2^2 \cdot \pi + 2 \cdot \pi \cdot 3 = 10\pi$

b) ☐ $s = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$ ☐ $s = t \cdot \left(v_0 \cdot \frac{g}{2} \cdot t\right)$ ☐ $s = \frac{t}{2}(2 \cdot v_0 + g \cdot t)$

c) ☐ $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$ ☐ $E = m \cdot \left(\frac{v^2}{2} + g \cdot h\right)$ ☐ $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v^2 + g \cdot h)$

d) ☐ $m = \frac{\rho}{V}$ ☐ $\rho = m \cdot V^{-1}$ ☐ $\rho \cdot V = m$

e) ☐ $d = \sqrt{e^2 - f^2}$ ☐ $e = \sqrt{f^2 - d^2}$ ☐ $f = \sqrt{e^2 - d^2}$

Lösungen

A 9 Herr Maier möchte sein Auto reparieren lassen und holt dafür das Angebot einer Fachwerkstatt ein. Sie verrechnet für eine halbe Stunde Arbeitszeit a Euro und einen Pauschalbetrag für Ersatzteile in Höhe von e Euro.

Aufgabenstellung: Geben Sie eine Formel an, mit der Herr Maier die Kosten K der Reparatur seines Autos in dieser Werkstatt bei t verbrauchten Stunden an Arbeitszeit berechnen kann!

K = ______________________________

A 10 Eine Reisegruppe mit E Erwachsenen und K Kindern besucht einen Zirkus. Eine Eintrittskarte kostet p_1 Euro für Erwachsene und p_2 Euro für Kinder.

Aufgabenstellung: Erklären Sie, was der Term $\frac{p_1 \cdot E + p_2 \cdot K}{E + K}$ im Zusammenhang mit dem Zirkusbesuch bedeutet!

A 11 Eine Aktie hat zu Jahresbeginn einen Wert von W Euro. In den folgenden beiden Jahren treten starke Kursschwankungen auf: Die Aktie verliert im ersten Jahr 15 % an Wert und legt im darauffolgenden Jahr 20 % an Wert zu.

Aufgabenstellung: Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich der Wert der Aktie insgesamt verändert hat! Geben Sie dabei an, ob der Wert insgesamt gestiegen oder gefallen ist!

Veränderung in Prozent: __________________

A 12 Die elektrische Leistung P ist das Produkt aus Spannung U und Stromstärke I, d. h. $P = U \cdot I$. Die Spannung ist das Produkt aus Widerstand R und Stromstärke I, d. h. $U = R \cdot I$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, die sich aus den gegebenen Zusammenhängen ableiten lassen!

$P = U^{-2} \cdot R$	☐
$P = U^2 \cdot R^{-1}$	☐
$P = I^2 \cdot R$	☐
$P = \frac{I^2}{R}$	☐
$P = U \cdot R \cdot I$	☐

A 13 Bei der Benutzung eines Streamingportals für Filme werden pro geladenem Gigabyte a Cent verlangt. Ein User verwendet diesen Streamingdienst in einem Monat an x Tagen und lädt im Durchschnitt an jedem dieser Tage b Gigabyte an Filmmaterial.

Aufgabenstellung: Geben Sie die Kosten K für das Portal, die der User in diesem Monat zu begleichen hat, in Euro an!

K = ______________________________

A 14 Ein Schwimmbecken wird aus zwei Leitungen mit Wasser gefüllt. Durch die erste Wasserleitung fließen L Liter pro Minute. Die zweite Leitung befördert um 30 % weniger Wasser als die erste.

Aufgabenstellung: Geben Sie eine Formel für die durchschnittlich geflossene Wassermenge V pro Minute in Litern an, wenn zunächst nur die erste Leitung a Minuten lang und danach nur die zweite doppelt so lang geöffnet ist!

V = ______________________________

Stichwortverzeichnis

LERN- UND ERFOLGREICH ERPROBT TRAININGSSYSTEM

Mit MatheTutor meisterst du die Mathematik-Matura!

Dein MatheTutor bietet dir alles, was du zum Verstehen, Erlernen und Anwenden aller Grundkompetenzen benötigst: Damit hast du die Mathematik-Matura in der Tasche!

Mit über **600 Aufgaben und Beispielen** zu allen Grundkompetenzen der Matura wiederholst du von Grund auf den wesentlichen Stoff und frischst gezielt dein Wissen auf. Aber dein **MatheTutor** ist viel **mehr als eine Aufgabensammlung**:

1. ***Informiere dich*** zu Beginn jedes Kapitels über benötigte Grundlagen und praktische Werkzeuge für die anstehenden Aufgaben.
2. ***Vollziehe nach***, wie du typische Aufgaben meisterst. Musterbeispiele weisen dir den Weg.
3. ***Probiere selbst*** eine solche Aufgabe zu lösen. Dabei kannst du dich am entsprechenden Musterbeispiel orientieren.
4. ***Trainiere weiter*** und lerne weitere Aufgabentypen kennen, natürlich mit Hilfestellungen. So gewinnst du nach und nach die nötige Sicherheit.
5. ***Teste dich*** selbst anhand von Aufgaben – authentisch und ganz im Stil von Teil 1 der Matura!

Darüber hinaus gibt es über 40 Aufgaben im Stil der **Typ-2-Aufgaben mit reduziertem Kontext**. Hier wendest du die erlernten Grundkompetenzen gezielt weiter an.

Weiters findest du online:

- **Ausführliche Lösungen** mit Hinweisen und Erklärungen – auch zum Technologieeinsatz
- **Zusätzliche *Probiere selbst*-Aufgaben**
- **Alle Modellschritte** an einer Stelle als praktisches Hilfsmittel beim Lernen und Üben

www.helbling.com

HELBLING

ISBN 978-3-99069-874-7

9 783990 698747